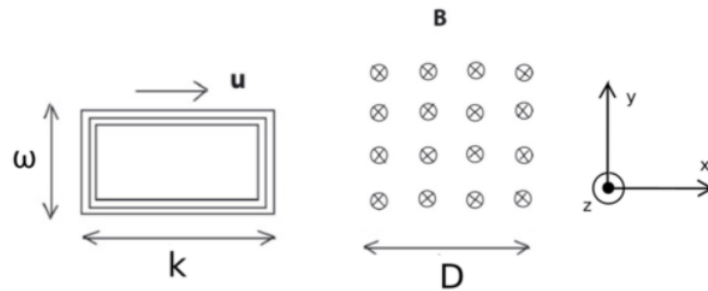


## Corrigé 13

## Exercice 1: Auto-inductance

On reprend l'exercice 4 de la semaine précédente ("Induction et force de Lorentz") avec une bobine de résistance  $R$ , constituée de  $N = nl$  ( $l$  est la hauteur de la bobine,  $n$  est le nombre de tours par unité de hauteur de la bobine) spires rectangulaires de longueur  $k$  et de largeur  $w$ . Maintenant, on prend en compte l'auto-inductance de la bobine qui sera assimilée à une bobine idéale. On supposera que la bobine se déplace à une vitesse  $u$  constante le long de l'axe  $x$ .



- Pendant la période durant laquelle la bobine entre dans la zone soumise au champ  $B$  mais n'est pas encore entièrement dedans, exprimez le flux du champ total (le champ  $B$  extérieur plus celui produit par le courant  $I$  dans la bobine) à travers la bobine en fonction du courant  $I$  et de la distance  $x$  parcourue par la bobine à l'intérieur de la zone avec le champ magnétique.
- À partir du résultat de la partie a), montrez qu'en présence d'une variation du flux totale, la bobine est équivalente à un circuit fermé composé d'une résistance  $R$ , d'une inductance  $L = \mu_0 n^2 l \omega k$  et d'une fem  $\varepsilon$ . Déterminez  $I(t)$  pour l'intervalle de temps où la bobine entre dans la zone soumise au champ magnétique  $B$  uniforme.
- Déterminez la dépendance temporelle du courant  $I(t)$  pour l'intervalle de temps où la bobine est entièrement dans la zone soumise au champ magnétique  $B$  uniforme (avant qu'elle ne commence à sortir par le côté droit).

## Solution:

- Comme surface  $S$ , on choisit la section de la bobine. Son aire est donc  $\omega k$ . On oriente  $d\vec{S}$  le long de l'axe  $z$ , tel qu'il sorte de la feuille. Par conséquent, le sens positif de la boucle est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (selon le point de vue du schéma de l'énoncé). Selon la règle de Lenz, on s'attend que le courant induit  $I$  circule aussi dans ce sens.

Le flux total  $\phi_{tot, boucle}$  à travers une boucle de la bobine est :

$$\phi_{tot, boucle} = \omega x \vec{B}_{ext} \cdot \vec{e}_z + \omega k \vec{B}_b \cdot \vec{e}_z$$

où  $\vec{B}_{ext} = -B_0 \vec{e}_z$  est le champ extérieur et  $\vec{B}_b$  celui produit par la bobine. Pour une bobine idéale, on a que  $\vec{B}_b = \mu_0 n I \vec{e}_z$  (voir cours). On trouve donc

$$\phi_{tot, boucle} = -\omega x B_0 + \mu_0 n I \omega k$$

Pour les  $N = nl$  boucles, on a donc que

$$\phi_{tot} = -nl\omega x B_0 + \mu_0 n^2 l I \omega k$$

(b) La loi d'induction de Faraday nous dit que la tension induite dans la bobine est

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi_{tot}}{dt} = nl\omega B_0 \frac{dx}{dt} - \mu_0 n^2 l \omega k \frac{dI}{dt}$$

Avec  $u \equiv \frac{dx}{dt}$  et  $L \equiv \mu_0 n^2 l \omega k$ , on obtient

$$\varepsilon_{ind} = nl\omega B_0 u - L \frac{dI}{dt}$$

Cette tension induite fait circuler le courant dans la bobine, à travers sa résistance non-nulle, donc

$$\varepsilon_{ind} = nl\omega B_0 u - L \frac{dI}{dt} = RI$$

Si on définit  $\varepsilon = nl\omega B_0 u$  comme la fem induite par le champ  $B$  extérieur, ceci s'écrit comme :

$$\varepsilon - RI - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (1)$$

Notre système est donc équivalent à un circuit  $RL$  avec la fem  $\varepsilon$ .

Trouvant la solution générale  $I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$  de l'équation homogène  $RI + L \frac{dI}{dt} = 0$  et la solution particulière  $I = \varepsilon/R$ , on obtient la solution générale de l'équation (1) :

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{\varepsilon}{R}$$

Avec la condition initiale  $I(t=0) = 0$  (on choisit  $t=0$  quand  $x=0$ ) on trouve

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

On trouve que après un temps  $t \gg L/R$ , le courant  $I$  est égal à celui trouvé dans l'exercice 4 de la série 12, où on avait négligé l'auto-inductance. Le flux  $\phi$  dû au champ extérieur et le courant dans la bobine sont montrés dans la figure en bas, pour le cas où  $\tau = \frac{L}{R} \ll \frac{k}{u} = t_{trans}$ , avec  $t_{trans}$  le temps que la bobine prend pour entrer entièrement dans la zone du champ magnétique.

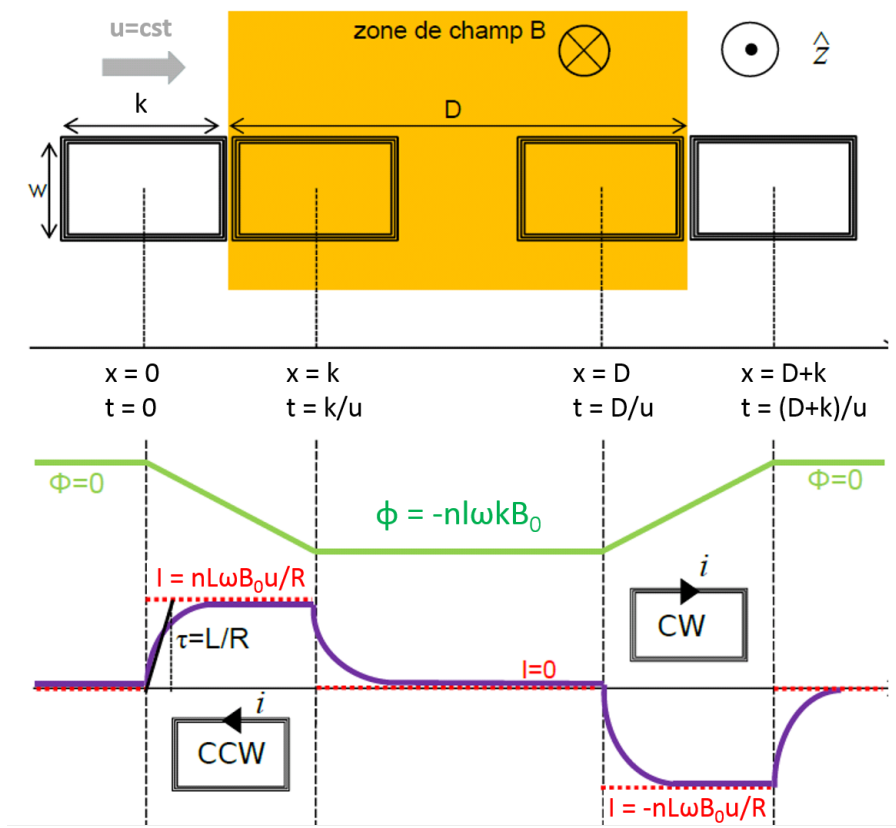
(c) Dès que la bobine est entièrement dans le champ, on a que  $\varepsilon = 0$  pour  $t > t_{trans} = \frac{k}{u}$ . Donc :

$$-RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

avec la solution générale  $I(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$  pour  $t > t_{trans}$ . Au moment  $t = t_{trans}^-$ , juste avant que la bobine soit entièrement dans la zone du champ  $B$  uniforme, on sait de la partie (b) qu'elle porte un courant

$$I(t_{trans}^-) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t_{trans}}\right)$$

Supposant  $t_{trans} = \frac{k}{u} \gg \frac{L}{R} = \tau$ , on obtient  $I(t_{trans}^-) = \frac{\varepsilon}{R}$ . Le courant étant contraint à être continu en présence de la bobine, on a  $I(t_{trans}^-) = I(t_{trans}^+)$  où  $t_{trans}^+$  correspond à l'instant juste après que la bobine soit entièrement dans la zone du champ  $B$  uniforme. Donc  $\frac{\varepsilon}{R} = I_0 e^{-\frac{R}{L} t_{trans}}$  et en remplaçant l'expression de  $I_0$  on obtient  $I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{R}{L} (t - t_{trans})}$  pour  $t > t_{trans}$ . Cette situation est illustrée dans la figure ci-dessous, ainsi que le comportement inverse quand la bobine sort du champ magnétique.

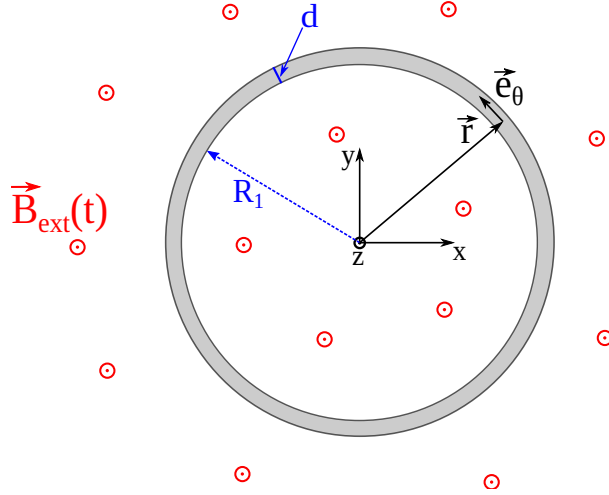


## Exercice 2: Courant induit dans une canette (Examen 2019)

On considère un cylindre creux de diamètre interne  $R_1$  et de longueur  $l \gg R_1$ , orienté le long de l'axe  $z$ , voir la figure ci-dessous. L'épaisseur  $d$  des parois du cylindre est très mince,  $d \ll R_1$ . Le cylindre, constitué d'un matériau conducteur de conductivité électrique  $\sigma$ , est plongé dans un champ magnétique externe  $\vec{B}_{\text{ext}}(\vec{r}, t) = \vec{B}_{\text{ext}}(t)$ , uniforme dans l'espace, donné par

$$\begin{aligned}\vec{B}_{\text{ext}}(t) &= \vec{0} && \text{pour } t < 0 \\ \vec{B}_{\text{ext}}(t) &= \alpha t \vec{e}_z && \text{pour } t \geq 0\end{aligned}$$

où  $\alpha > 0$  est une constante



- Pour  $t > 0$ , trouvez la valeur de la tension induite et la direction du courant induit dans le cylindre par le champ magnétique  $\vec{B}_{\text{ext}}(t)$ . Justifiez votre réponse. Négligez ici l'auto-inductance du cylindre, c'est à dire l'effet du champ magnétique généré par le courant induit.
- Dans le cas a), pour  $t > 0$ , donnez l'expression du courant induit  $I(t)$  en fonction de  $\sigma$ ,  $\alpha$  et des paramètres géométriques de la canette. Quelle est la valeur de  $I(t)$  dans la limite  $\sigma \rightarrow \infty$  ?
- On suppose maintenant que l'on peut écrire la densité de courant dans la paroi du cylindre comme  $\vec{j} = -j_0 \vec{e}_\theta$ . Utilisez la loi d'Ampère pour déterminer, à l'intérieur du cylindre ( $r < R_1$ ), la norme et la direction du champ magnétique  $\vec{B}_c$  généré par  $\vec{j}$ , en exprimant la norme de  $\vec{B}_c$  en fonction de  $j_0$ , puis également en fonction du courant  $I$ .  
*Indication : vous pouvez supposer que le champ magnétique  $\vec{B}_c$  est nul à l'extérieur du cylindre ( $r > R_1 + d$ ) et que  $l \gg R_1$ .*
- Déterminez l'expression du courant  $I(t)$  en prenant en compte les effets d'auto-induction du cylindre et en supposant que  $I(t = 0) = 0$ .
- En utilisant les résultats des parties c) et d), déterminez le champ magnétique total à l'intérieur du cylindre ( $r < R_1$ ) pour un temps  $t = t_0 > 0$ , et trouvez sa valeur pour les cas limites  $\sigma \rightarrow 0$  et  $\sigma \rightarrow \infty$ .

*Indication : vous pouvez utiliser le développement limité  $e^x \approx 1 + x$  pour une quantité  $x \ll 1$ .*

### Solution:

- Du fait du champ magnétique extérieur, il existe un flux magnétique à travers la section  $S$  du cylindre de rayon  $R_1$ . Si l'on oriente arbitrairement l'élément différentiel de surface tel que  $d\vec{S} = -dS \vec{e}_z$ , alors ce flux s'exprime

$$\phi_{\text{ext}} = \iint_S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S} = -\alpha t \pi R_1^2$$

La variation temporelle de  $B_{\text{ext}}$  génère une variation du flux dans le temps, ce qui induit l'apparition d'une force électromotrice le long du contour de la surface de la canette. Avec l'orientation choisi pour  $d\vec{S}$ , le sens conventionnel du courant (selon lequel on le compte positivement) respectera la règle de la main droite et sera selon  $-\vec{e}_\theta$  (comme indiqué en vert dans le schéma ci-dessous). D'après la loi de Faraday, la force électromotrice induite s'écrit

$$\varepsilon_{\text{ext}} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} = -\frac{d}{dt}(-\alpha t \pi R_1^2)$$

D'où

$$\boxed{\varepsilon_{\text{ext}} = \alpha \pi R_1^2}$$

En considérant uniquement la résistance électrique de la canette  $R$  ainsi que la force électromotrice induite, la loi des mailles donne

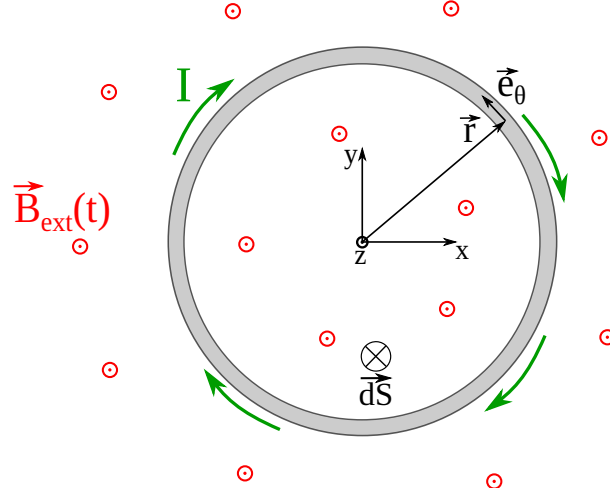
$$RI - \alpha \pi R_1^2 = 0$$

D'où

$$\boxed{I(t) = I = \frac{\alpha \pi R_1^2}{R}}$$

Étant donné que  $\alpha > 0$ , on a  $I > 0$  et donc la circulation du courant se fait effectivement selon l'orientation du schéma (NB : on aurait eu  $I < 0$  avec une orientation de  $d\vec{S}$  selon  $\vec{e}_z$  et donc un sens conventionnel de  $I$  selon  $\vec{e}_\theta$ ).

On remarque qu'avec ce sens effectif du courant induit, le champ magnétique généré par le courant induit est selon  $-\vec{e}_z$  à l'intérieur du cylindre (règle de la main droite) et s'oppose donc au champ extérieur. Cela est en accord avec la règle de Lenz puisque ce champ magnétique s'oppose aux changements du flux magnétique qui créent ce courant induit.



- (b) Tout d'abord on calcule la résistance  $R$  du cylindre selon la direction  $\vec{e}_\theta$ . Puisque  $d \ll R_1$ , on peut négliger la variation de circonférence entre le bord intérieur et extérieur du cylindre. Par conséquent, l'expression de la résistance est similaire à celle d'un fil rectiligne de section  $ld$  et de longueur  $2\pi R_1$ , on a donc

$$R = \rho \frac{2\pi R_1}{ld} = \frac{1}{\sigma} \frac{2\pi R_1}{ld}$$

où  $\rho$  est la résistivité du cylindre et  $\sigma = 1/\rho$  sa conductivité électrique.

En remplaçant l'expression de  $R$  dans la formule pour  $I$  trouvée à la question précédente, on obtient

$$\boxed{I = \frac{\alpha R_1 \sigma ld}{2}}$$

Si  $\sigma \rightarrow \infty$ , le courant devient infini

$$\boxed{\lim_{\sigma \rightarrow \infty} I(t) = -\infty}$$

- (c) Comme démontré avec les calculs précédents ainsi qu'avec la Règle de Lenz, on sait que le champ magnétique  $\vec{B}_c$  créé par le courant induit est selon  $-\vec{e}_z$  à l'intérieur du cylindre, tel que  $\vec{B}_c = -B_c(r, \theta, z)\vec{e}_z$ . De plus l'énoncé nous indique que  $\vec{B}_c$  est nul à l'extérieur du cylindre. La symétrie axial du cylindre nous permet d'affirmer l'absence de dépendance en  $\theta$  et l'hypothèse  $R_1 \ll l$  nous permet de négliger les effets de bord et donc les variations en  $z$  du champ magnétique à l'intérieur du cylindre. D'où

$$\vec{B}_c = -B_c(r)\vec{e}_z$$

avec  $B_c(r < R_1) > 0$ .

Pour trouver la valeur de  $B_c(r)$  à l'intérieur du cylindre, on considère le contour d'Ampère  $\mathcal{C}$  rectangulaire (hauteur  $h$ , largeur  $w$ ) comme illustré dans la figure ci-dessous. D'après la loi d'Ampère, on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_c \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

— En intégrant  $\vec{B}_c$  sur le contour, on obtient

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B}_c \cdot d\vec{l} = hB_c$$

— En intégrant la densité de courant sur la surface enlacée par le contour, on obtient

$$\begin{aligned} \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} &= \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} j_0 dS \\ &= \mu_0 j_0 \int_{R_1}^{R_1+d} \int_0^h dr dz \\ &= \mu_0 j_0 dh \end{aligned}$$

D'où par égalité entre les deux termes précédents

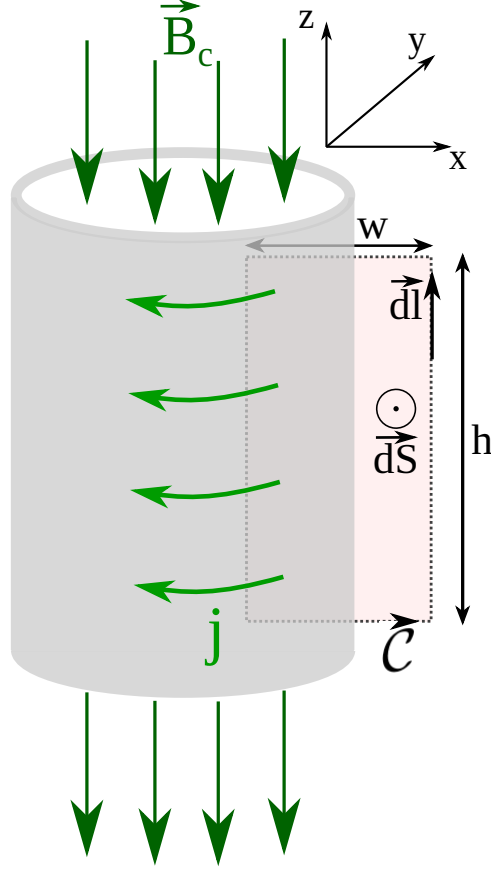
$$\boxed{B_c = \mu_0 j_0 d}$$

$I$  étant le courant total orienté selon  $-\vec{e}_\theta$  parcouru par la section totale  $S_t$  de la canette, on a par définition

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S_t} \vec{j} \cdot d\vec{S}_t \\ &= \iint_{S_t} j_0 dS_t \\ &= j_0 \int_{R_1}^{R_1+d} \int_0^l dr dz \\ &= j_0 dl \end{aligned}$$

Donc  $j_0 = I/(dl)$  et le champ magnétique peut aussi s'exprimer sous la forme

$$\boxed{B_c = \mu_0 \frac{I}{l}}$$



En notation vectorielle, le champ magnétique est donc

$$\vec{B}_c = -\frac{\mu_0 I}{l} \vec{e}_z = -\mu_0 j_0 d \vec{e}_z, \quad \forall z \in [0, l], \quad \forall r \in [0, R_1]$$

(d) En tenant compte de l'auto-inductance du cylindre, la tension induite  $\varepsilon_{\text{tot}}$  est

$$\varepsilon_{\text{tot}} = -\frac{d\phi_{\text{tot}}}{dt} = -\frac{d(\phi_{\text{ext}} + \phi_{\text{ind}})}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( -\alpha t \pi R_1^2 + \frac{\mu_0 I}{l} \pi R_1^2 \right) = \alpha \pi R_1^2 - \frac{\mu_0}{l} \pi R_1^2 \frac{dI}{dt}$$

En définissant

$$L = \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{l} \quad \varepsilon_{\text{ext}} = \alpha \pi R_1^2$$

La loi des mailles nous permet d'obtenir l'équation différentielle en  $I(t)$

$$\varepsilon_{\text{ext}} - L \frac{dI}{dt} - RI = 0 \quad (2)$$

La solution générale de cette équation s'écrit comme la somme d'une solution particulière  $I_{\text{par}}$  de l'équation complète avec la solution générale  $I_{\text{hom}}$  de l'équation homogène associée. Une solution particulière de l'équation (2) est  $I_{\text{par}} = \varepsilon_{\text{ext}}/R$ . L'équation homogène associée

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0$$

a des solutions de la forme  $I_{\text{hom}}(t) = I_0 e^{\beta t}$ . En injectant cette expression dans l'équation homogène, on trouve  $\beta = -R/L$  et ainsi  $I_{\text{hom}}(t) = I_0 e^{-(R/L)t}$ .

Finalement, la solution générale de l'équation (2) est

$$I(t) = I_{\text{par}} + I_{\text{hom}} = \frac{\varepsilon_{\text{ext}}}{R} + I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

En utilisant la condition  $I(t=0) = 0$ , on trouve  $I_0 = -\varepsilon_{\text{ext}}/R$  et, ainsi,

$$I(t) = \frac{\varepsilon_{\text{ext}}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{\alpha R_1 \sigma l d}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\mu_0 \sigma d R_1}t}\right)$$

- (e) Le champ total est la superposition du champ externe et de celui généré par le courant induit  $I$  :

$$\vec{B}_{\text{tot}}(t) = \vec{B}_{\text{ext}}(t) + \vec{B}_c(t) = \left(\alpha t - \frac{\mu_0 \varepsilon_{\text{ext}}}{l R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})\right) \vec{e}_z$$

En posant  $t = t_0 > 0$ , et en remplaçant  $R$  avec sa définition, la composante du champ totale selon  $\vec{e}_z$  devient

$$B_{\text{tot}}(t_0) = \alpha t_0 - \frac{\mu_0 \alpha R_1 \sigma d}{2} (1 - e^{-\frac{2\pi R_1}{\sigma l L d} t_0})$$

Si  $\sigma \rightarrow 0$ , la composante devient

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} B_{\text{tot}}(t_0) = \alpha t_0$$

Si  $\sigma \rightarrow \infty$ , on utilise l'expansion  $e^x \approx 1 + x$ , avec  $x = -\frac{2\pi R_1}{\sigma l L d} t_0$ , et on trouve

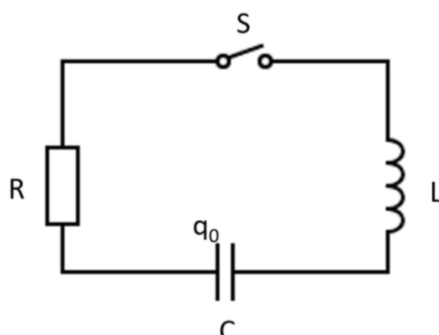
$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} B_{\text{tot}}(t_0) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left(\alpha t_0 - \frac{\mu_0 \alpha R_1 \sigma d}{2} \frac{2\pi R_1}{\sigma l L d} t_0\right) = 0$$

vu que  $L = \frac{\mu_0 \pi R_1^2}{l}$ .



### Exercice 3: Circuit électrique oscillant - Principe de la bobine de Tesla (Examen 2020)

On considère le circuit montré dans la figure ci-dessous, composé d'un condensateur de capacité  $C$ , d'une bobine avec auto-inductance  $L$ , et d'une résistance de valeur  $R$ . L'auto-inductance du reste du circuit (à part celle de la bobine déjà tenue en compte) est négligeable. La situation initiale est telle que l'interrupteur  $S$  est ouvert et que le condensateur porte la charge  $+q_0$ .

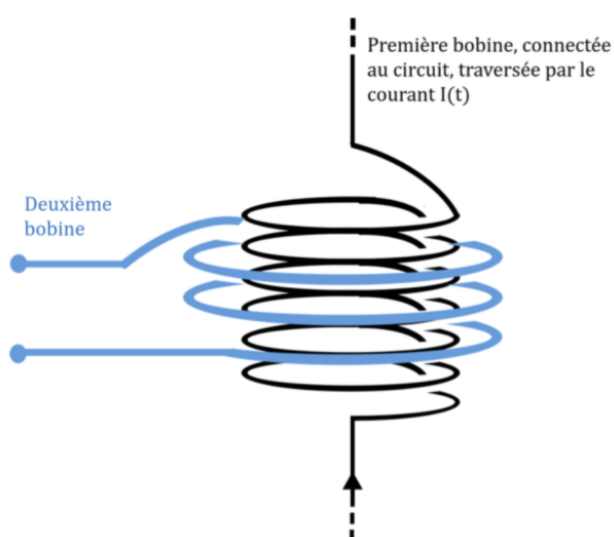


- (a) À  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $S$ . Démontrez que l'équation différentielle régissant l'évolution du courant est donnée par

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (3)$$

- (b) On a que  $I(t = 0) = 0$ . Montrez que la deuxième condition initiale pour le courant est  $\frac{dI}{dt}(t = 0) = +\frac{q_0}{LC}$  si vous avez défini la direction positive du courant dans la direction de l'aiguille de montre, ou  $\frac{dI}{dt}(t = 0) = -\frac{q_0}{LC}$  dans le cas contraire.
- (c) Avec les résultats des parties a) et b), déterminez  $I(t)$  dans la limite  $\frac{L}{C} > \frac{1}{4}R^2$ .

On ajoute maintenant une deuxième bobine, entourant la première comme indiqué sur la figure ci-dessous. La première bobine reste connectée au circuit comme avant. Les bornes de la deuxième bobine sont ouvertes, tel qu'aucun courant ne peut circuler dans cette bobine. La longueur  $l_1$ , la section  $S_1$ , et le nombre de spires  $N_1$  de la première bobine sont connus. Même chose pour la deuxième bobine ( $l_2, S_2, N_2$ ). Les deux bobines peuvent être considérées comme des bobines idéales.

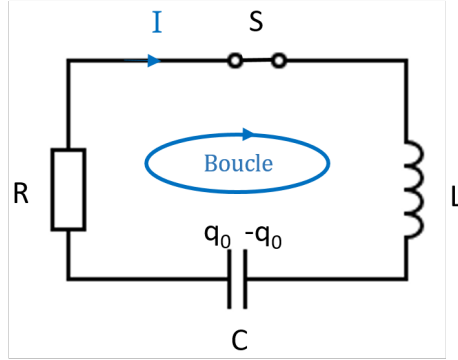


- (d) Exprimez la valeur absolue de la tension induite dans la deuxième bobine en fonction du courant  $I(t)$  dans la première bobine et d'autres quantités données.
- (e) Trouvez la valeur absolue du rapport entre la tension induite dans la deuxième bobine et la tension entre les bornes de la première bobine. Pour simplifier l'expression finale, exprimez l'auto-inductance de la première bobine en fonction du nombre de spires et de ses dimensions.

- (f) En utilisant le résultat pour  $I(t)$  trouvé dans la partie c) et en supposant maintenant que  $R = 0$ , donnez l'expression de la tension maximale induite dans la deuxième bobine en fonction de la capacité et de la charge initiale  $q_0$  du condensateur.

**Solution:**

- (a) On définit la direction du courant et de la boucle comme dans la figure.



Par la loi de Kirchhoff, on obtient,

$$V_R + V_L + V_C = 0 \quad (4)$$

Puis, on trouve,

$$V_R = -IR \quad (5)$$

$$V_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (6)$$

$$V_C = \frac{q(t)}{C} \quad (7)$$

$$-L \frac{dI}{dt} - IR + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad (8)$$

La dérivée par rapport au temps nous donne :

$$-L \frac{d^2 I}{dt^2} - R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} = 0 \quad (9)$$

On peut écrire le courant comme  $I = -\frac{dq(t)}{dt}$ . On trouve donc

$$L \frac{dI^2}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (10)$$

Si on avait défini le courant positif dans le sens inverse que celui montré dans la figure, on aurait obtenu  $I = \frac{dq(t)}{dt}$ , avec l'expression :

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q(t)}{C} = 0. \quad (11)$$

On aurait donc trouvé la même expression finale :

$$L \frac{dI^2}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (12)$$

(b) À  $t = 0$ , l'équation (8) devient :

$$-L \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} - I(t=0)R + \frac{q_0}{C} = 0. \quad (13)$$

Comme  $I(t=0) = 0$ , on trouve :

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{+q_0}{LC} \quad (14)$$

Pour le courant positif dans le sens anti-horaire, on aurait trouvé :

$$L \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} + I(t=0)R + \frac{q_0}{C} = 0, \quad (15)$$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{-q_0}{LC} \quad (16)$$

(c) On commence à chercher une solution de la forme :  $I(t) = I_0 \exp(\alpha t)$ . Cela nous donne l'équation caractéristique suivante :

$$L\alpha^2 + R\alpha + \frac{1}{C} = 0, \quad (17)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (18)$$

Vu que  $L/C > 1/4R^2$ , on peut récrire  $\alpha_{1,2}$  comme :

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\frac{R}{2L} \pm i\omega, \quad (19)$$

où on définit la fréquence d'oscillation,  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ .

Comme il y a deux solutions pour  $\alpha$ , on arrive à la solution générale :  $I(t) = I_1 \exp(\alpha_1 t) + I_2 \exp(\alpha_2 t)$ .

De suite,

$$I(t) = \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) [I_1 \exp(i\omega t) + I_2 \exp(-i\omega t)]. \quad (20)$$

De la première condition initiale, on a que

$$I(t=0) = I_1 + I_2 = 0, \quad (21)$$

$$I_1 = -I_2. \quad (22)$$

Alors on trouve,

$$I(t) = I_1 \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) [\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t)], \quad (23)$$

$$I(t) = I_1 \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) 2i \sin(\omega t). \quad (24)$$

De la deuxième condition initiale, on a que

$$\frac{dI}{dt} = 2iI_1 \left[ \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \omega \cos(\omega t) - \frac{R}{2L} \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) \sin(\omega t) \right], \quad (25)$$

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = 2iI_1\omega = \frac{q_0}{LC}, \quad (26)$$

$$I_1 = \frac{q_0}{2i\omega LC}. \quad (27)$$

Cela nous donne l'expression finale,

$$I(t) = \frac{q_0}{\omega LC} \exp\left(\frac{-Rt}{2L}\right) \sin(\omega t). \quad (28)$$

(d) Le champ  $B$  généré à l'intérieur d'une bobine idéale par un courant  $I$  est donné par

$$B(t) = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} I(t), \quad (29)$$

Le flux à travers une spire de la deuxième bobine est :

$$\Phi_2(t) = B(t)S_1 = \mu_0 \frac{N_1 S_1}{l_1} I(t). \quad (30)$$

Cela nous donne le flux qui traverse chaque spire de la deuxième bobine. Donc, le flux qui traverse l'entièreté de la deuxième bobine est :

$$\Phi_{2,tot}(t) = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1}{l_1} I(t). \quad (31)$$

On trouve que la tension induite dans la deuxième bobine est

$$|\epsilon_{ind}| = \left| -\frac{d\Phi_{2,tot}}{dt} \right| = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1}{l_1} \left| \frac{dI}{dt} \right|. \quad (32)$$

(e) La tension entre les bornes de la première bobine est :

$$|\epsilon_1| = L \left| \frac{dI}{dt} \right| = \mu_0 \frac{N_1^2 S_1}{l_1} \left| \frac{dI}{dt} \right|, \quad (33)$$

Avec le résultat de d), on trouve :

$$\frac{|\epsilon_{ind}|}{|\epsilon_1|} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1}{l_1} \left| \frac{dI}{dt} \right| \left( \mu_0 \frac{N_1^2 S_1}{l_1} \left| \frac{dI}{dt} \right| \right)^{-1} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (34)$$

Notez que l'arrangement de ces deux bobines est appelé un transformateur. En appliquant une tension alternative à la bobine d'entrée, ce dispositif permet de transformer la tension aux bornes de la bobine de sortie. Dans le cas idéal, le rapport des tensions dépend uniquement du nombre d'enroulements des deux bobines.

(f) De la partie c), supposant que  $R = 0$ , on a :

$$I(t) = \frac{q_0}{\omega LC} \sin(\omega t), \quad (35)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{q_0}{LC} \cos(\omega t), \quad (36)$$

$$|\epsilon_{ind}| = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S_1}{l_1} \frac{q_0}{LC} |\cos(\omega t)|. \quad (37)$$

En remplaçant  $L$  par l'expression suivante :

$$L = \mu_0 \frac{N_1^2 S_1}{l_1}, \quad (38)$$

on trouve l'expression :

$$|\epsilon_{ind}| = \frac{N_2 q_0}{N_1 C} |\cos(\omega t)|. \quad (39)$$

Donc, on trouve que la tension maximale induite dans la deuxième bobine est :

$$\epsilon_{ind}^{max} = \frac{N_2 q_0}{N_1 C}. \quad (40)$$

Cette tension est donc proportionnel à  $q_0$  et inversement proportionnel à  $C$ .

#### Exercice 4: Onde électromagnétique (Examen 2019)

- (a) Dérivez l'équation d'onde pour le champ magnétique  $\vec{B}$  à partir des équations de Maxwell dans le vide (densité de charge  $\rho_{el} = 0$ , densité de courant  $\vec{j} = 0$ ).

*Rappel : Pour un champ vectoriel  $\vec{A}(\vec{r})$ , on a l'identité suivante :*

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

- (b) Les ondes électromagnétiques visibles ont une longueur d'onde entre  $\lambda_1 = 380$  nm et  $\lambda_2 = 750$  nm ( $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ ). Trouvez les fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$  associées à ces ondes dans le vide. La vitesse de la lumière est  $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- (c) On considère des ondes sonores de mêmes longueurs d'onde (entre  $\lambda_1 = 380$  nm et  $\lambda_2 = 750$  nm). Trouvez les fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$  associées à ces ondes à  $20^\circ\text{C}$ . Ces ondes sont-elles audibles pour un être humain ? L'indice adiabatique  $\gamma$  de l'air est  $7/5$ , la masse moyenne des molécules dans l'air est  $m = 29 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  et la constante de Boltzmann est  $1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ . Les fréquences audibles pour un être humain s'étendent typiquement de 16 Hz à 16 kHz.

#### Solution:

- (a) On écrit les équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (41)$$

On calcule le rotationnel de la quatrième équation (l'équation de Maxwell-Ampère) :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (42)$$

On utilise le fait que le temps  $t$  et l'espace  $\vec{r}$  sont deux variables indépendantes, et on utilise l'identité vectorielle indiquée dans la consigne :

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t}. \quad (43)$$

Finalement, on substitue la deuxième et la troisième équation du système (41) dans (43), et on obtient :

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad (44)$$

c'est-à-dire l'équation d'onde pour le champ magnétique  $\vec{B}$  dans le vide.

(b) Pour une onde électromagnétique dans le vide on peut écrire :

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad (45)$$

donc on calcule la fréquence d'onde associé aux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}}{380 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \simeq 7.89 \cdot 10^{14} \text{ Hz}, \quad (46)$$

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}}{750 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \simeq 4.00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}. \quad (47)$$

(c) En considérant l'air comme un gaz idéal, on peut écrire la vitesse du son comme :

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}, \quad (48)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température en  $K$ . Dans notre cas, on obtient donc :

$$v_s = \sqrt{\frac{7}{5} \cdot \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1} (20 + 273.15) \text{ K}}{29 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \simeq 342 \text{ m.s}^{-1}. \quad (49)$$

On peut maintenant calculer la fréquence des ondes sonores de longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :

$$\nu_1 = \frac{v_s}{\lambda_1} = \frac{342 \text{ m.s}^{-1}}{380 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \simeq 900 \text{ MHz}, \quad (50)$$

$$\nu_2 = \frac{v_s}{\lambda_2} = \frac{342 \text{ m.s}^{-1}}{750 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \simeq 456 \text{ MHz}. \quad (51)$$

Ces ondes ne sont donc pas audibles pour un être humain.

### Exercice 5: Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique

Considérons une onde électromagnétique qui se propage dans le vide vers un matériau diélectrique uniforme et isotrope, avec un indice de réfraction  $n = \sqrt{\epsilon_r} > 1$ . L'incidence de l'onde est perpendiculaire à l'interface entre vide et matériau. On s'attend à ce qu'une partie de l'onde soit transmise et une partie réfléchi. Pour le champ  $\vec{E}$  associé à l'onde, on fait l'ansatz :

— Pour  $z < 0$  :

$$\vec{E}(z < 0, t) = \vec{E}_I(z, t) + \vec{E}_R(z, t)$$

avec

$$\vec{E}_I(z, t) = E_{XI} e^{i(\omega t - k_I z + \varphi_I)} \vec{e}_x$$

et

$$\vec{E}_R(z, t) = E_{XR} e^{i(\omega t + k_R z + \varphi_R)} \vec{e}_x$$

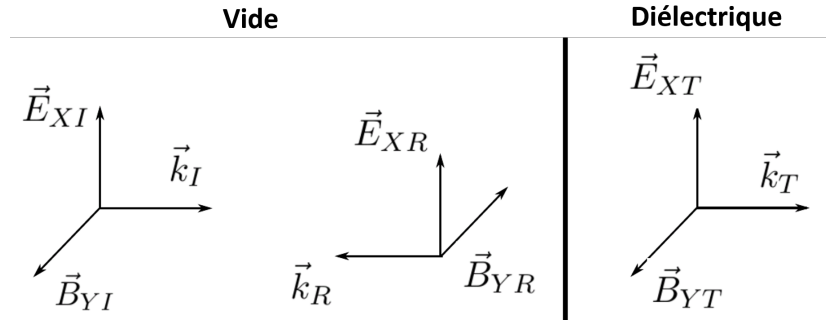
— Pour  $z > 0$  :

$$\vec{\tilde{E}}(z > 0, t) = \vec{\tilde{E}}_T(z, t)$$

avec

$$\vec{\tilde{E}}_T(z, t) = E_{XT} e^{i(\omega t - k_T z + \varphi_T)} \vec{e}_x$$

$E_{XI}$ ,  $E_{XR}$  et  $E_{XT}$  sont tous  $\in \mathbb{R}$  et positifs.



- (a) On suppose que  $\omega$ ,  $k_I$ ,  $k_R$  et  $k_T$  sont tous positifs. Exprimez  $k_I$ ,  $k_R$  et  $k_T$  en fonction de  $\omega$ .  
Indication : dans un matériau avec indice de réfraction  $n$ , la vitesse de la lumière est  $c/n$ , avec  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.
- (b) Complétez l'ansatz pour  $\vec{\tilde{E}}$  par la composante du champ magnétique. Utilisez la relation

$$\vec{\tilde{B}} = \frac{\vec{k} \times \vec{\tilde{E}}}{\omega}$$

qui suit de la Loi de Faraday est qui est valable dans le vide comme dans le matériau. Pourquoi sur la figure avons-nous représenté  $\vec{B}_{YR}$  opposé à  $\vec{B}_{YI}$  ?

- (c) On peut montrer qu'à l'interface vide-diélectrique, les composantes des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  parallèles à l'interface sont continues<sup>1</sup>. Utilisez ces conditions pour exprimer  $E_{XR}$ ,  $\varphi_R$ ,  $E_{XT}$  et  $\varphi_T$  en fonction de  $E_{XI}$  et  $\varphi_I$ .
- (d) Comme application numérique de la partie c), on prend l'interface air-eau. On a  $n_{air} = \sqrt{\epsilon_{r,air}} \approx \sqrt{1.0006} \approx 1 \approx$  cas du vide, et  $n_{eau} = \sqrt{\epsilon_{r,eau}} \approx \sqrt{1.7} = 1.3$  (valable pour les longueurs d'onde dans le visible). Quelle est votre conclusion ?

**Solution:**

- (a) On a la relation  $\omega = \frac{c}{n} |\vec{k}|$ . Comme  $\omega$ ,  $k_I$ ,  $k_R$  et  $k_T$  sont tous positifs, on trouve dans le vide ( $n = 1$ )  $k_I = k_R = \frac{\omega}{c}$ . Dans le diélectrique ( $n = \sqrt{\epsilon_r}$ ) on a  $k_T = \frac{n}{c} \omega$ .
- (b) On définit

$$\vec{\tilde{B}}_I(z, t) = \frac{\vec{k}_I \times \vec{\tilde{E}}_I}{\omega}$$

$$\vec{\tilde{B}}_R(z, t) = \frac{\vec{k}_R \times \vec{\tilde{E}}_R}{\omega}$$

$$\vec{\tilde{B}}_T(z, t) = \frac{\vec{k}_T \times \vec{\tilde{E}}_T}{\omega}$$

1. Pour  $\vec{E}$ , ceci est une conséquence de l'équation de Maxwell-Faraday, pour  $\vec{B}$  c'est une conséquence de l'équation de Maxwell-Ampère et du fait qu'il n'y a pas de courants de surface dans un diélectrique.

Dans ce cas, on a  $\vec{B}(z < 0, t) = \vec{B}_I(z, t) + \vec{B}_R(z, t)$  et  $\vec{B}(z > 0, t) = \vec{B}_T(z, t)$ .

Avec  $\vec{k}_I = k_I \vec{e}_z$ , on trouve

$$\vec{B}_I(z, t) = \frac{1}{\omega} k_I \vec{e}_z \times \vec{E}_I = \frac{1}{\omega} k_I \vec{e}_z \times (E_{XI} e^{i(\omega t - k_I z + \varphi_I)} \vec{e}_x) = \frac{1}{c} E_{XI} e^{i(\omega t - k_I z + \varphi_I)} \vec{e}_y$$

et avec  $\vec{k}_R = -k_R \vec{e}_z$ , on trouve :

$$\vec{B}_R(z, t) = \frac{1}{\omega} (-k_R \vec{e}_z) \times (E_{XR} e^{i(\omega t + k_R z + \varphi_R)} \vec{e}_x) = -\frac{1}{c} E_{XR} e^{i(\omega t + k_R z + \varphi_R)} \vec{e}_y$$

Finalement, avec  $\vec{k}_T = k_T \vec{e}_z$ , on trouve :

$$\vec{B}_T(z, t) = \frac{n}{c} E_{XT} e^{i(\omega t - k_T z + \varphi_T)} \vec{e}_y$$

Dans le vide comme dans un diélectrique isotrope et uniforme, les ondes électromagnétiques sont des ondes transversales où les vecteurs  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  forment un trièdre orthogonal orienté droit. Puisque l'onde réfléchie se propage selon  $-\vec{e}_z$ ,  $\vec{k}_R$  est selon  $-\vec{e}_z$  et donc  $\vec{B}_R$  est selon  $-\vec{e}_y$ .

- (c) Comme l'incidence est perpendiculaire à l'interface vide-diélectrique,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont parallèles à l'interface et doivent donc être continus. Donc :

$$\vec{E}_I(z \rightarrow 0^-, t) + \vec{E}_R(z \rightarrow 0^-, t) = \vec{E}_T(z \rightarrow 0^+, t)$$

et

$$\vec{B}_I(z \rightarrow 0^-, t) + \vec{B}_R(z \rightarrow 0^-, t) = \vec{B}_T(z \rightarrow 0^+, t)$$

Avec les données de l'exercice et le résultat de la partie b), ceci donne

$$E_{XI} e^{i(\omega t + \varphi_I)} \vec{e}_x + E_{XR} e^{i(\omega t + \varphi_R)} \vec{e}_x = E_{XT} e^{i(\omega t + \varphi_T)} \vec{e}_x$$

et

$$\frac{1}{c} E_{XI} e^{i(\omega t + \varphi_I)} \vec{e}_y - \frac{1}{c} E_{XR} e^{i(\omega t + \varphi_R)} \vec{e}_y = \frac{n}{c} E_{XT} e^{i(\omega t + \varphi_T)} \vec{e}_y$$

ce qui se simplifie en

$$E_{XI} e^{i\varphi_I} + E_{XR} e^{i\varphi_R} = E_{XT} e^{i\varphi_T} \quad (1)$$

$$E_{XI} e^{i\varphi_I} - E_{XR} e^{i\varphi_R} = n E_{XT} e^{i\varphi_T} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow E_{XT} = \frac{2}{1+n} E_{XI} e^{i(\varphi_I - \varphi_T)}$$

Comme on veut que  $E_{XI}, E_{XT} \in \mathbb{R}$  et  $> 0$ , on peut écrire

$$\varphi_I = \varphi_T \Rightarrow E_{XT} = \frac{2}{1+n} E_{XI}$$

Donc :

$$n \cdot (1) - (2) \Rightarrow E_{XR} = -\frac{n-1}{n+1} E_{XI} e^{i(\varphi_I - \varphi_R)}$$

et on peut écrire

$$\varphi_R = \varphi_I + \pi \Rightarrow E_{XR} = \frac{n-1}{n+1} E_{XI}$$

- (d) Avec  $n = 1.3$ , on a

$$E_{XR} = \frac{n-1}{n+1} E_{XI} = 0.13 E_{XI}$$

$$E_{XT} = \frac{2}{n+1} E_{XI} = 0.87 E_{XI}$$

On conclut qu'une petite partie de l'onde est réfléchie. Ceci explique pourquoi, même si vous pouvez voir la réflexion de votre visage sur l'eau, un miroir est quand-même beaucoup plus efficace.